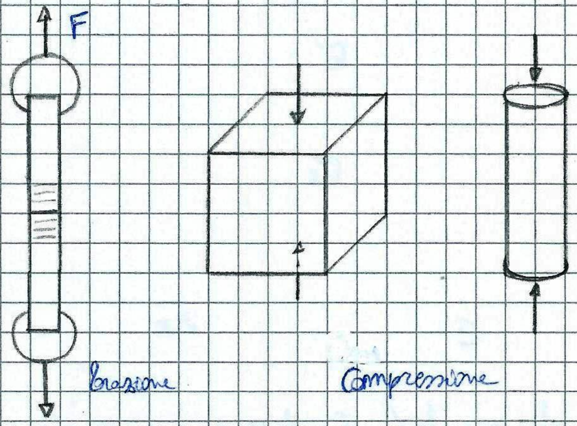
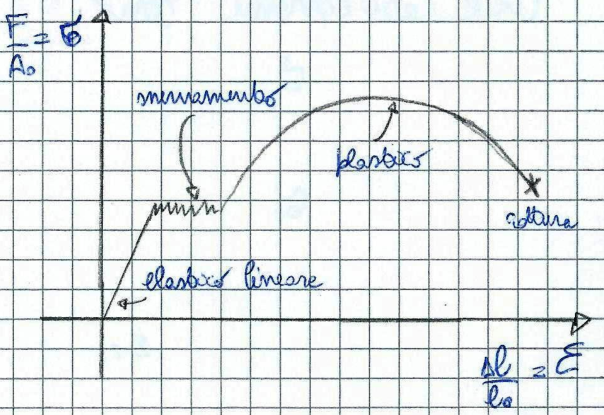
Il legame costitutivo

Mentre l'analisi di tensione e deformazione prescinde dalla natura del materiale considerato, il legame costitutivo, che pur discende dai due primi concetti, deve sempre essere relazionato ad un materiale particolare o almeno ad una certa categoria. Infatti differisce da materiale a materiale.
Viene studiato facendo prove standard di laboratorio di tipo monoassiale. Si costruiscono così i diagrammi ε-σ sulla base delle prove, che generalmente sono di trazione o di compressione.

Ecco uno schema introduttivo per materiali duttili:

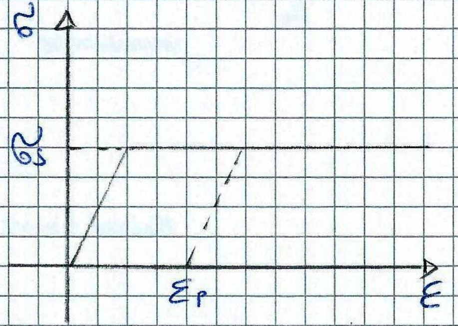


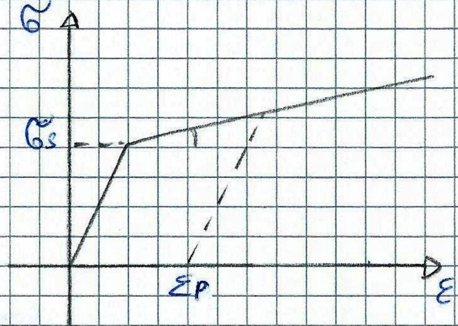


Nel grafico sono presentati i comportamenti manifestati dal materiale, che in questo caso è duttile. σ è detta tensione nominale, ed è data dalla forza F cui il provino è soggetto fratto A_0, area della sezione del provino non sollecitato. Si trascura il fatto che tale area si modifichi durante la prova. Invece ε è l'elongazione specifica nominale, pari al rapporto tra la variazione di lunghezza e la lunghezza l_0 del provino non sollecitato.
La curva di risposta dei materiali duttili è caratterizzata da tre zone di comportamento:

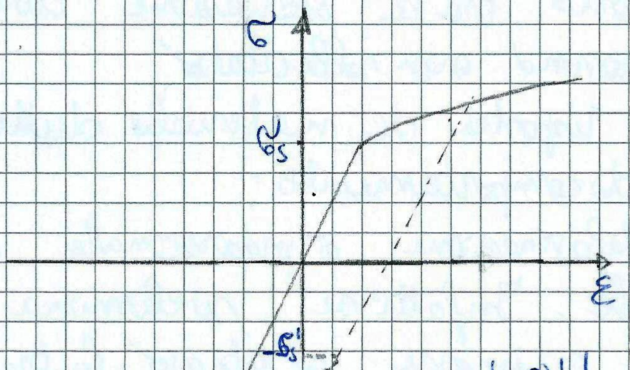
- lineare: la deformazione è proporzionale alla tensione, $\sigma \propto \varepsilon$, ed è reversibile. Infatti se si elimina la sollecitazione il materiale ripercorre a ritroso la trasformazione e torna allo stato iniziale;
- di snervamento: raggiunta σ_p (limite di proporzionalità) il materiale si comporta ancora in modo elastico, ma non lineare;

- plastico: raggiunto il limite di snervamento σ_s il materiale si deforma in modo non lineare e irreversibile. Se si rimuove la sollecitazione infatti il materiale percorre un ramo quasi rettilineo e parallelo al ramo elastico giungendo ad uno stato che presenta una deformazione residua ε_P.
Se si incrementa ancora la tensione si giunge alla rottura (tensione di rottura σ_r).
Se eseguiamo una prova di compressione anziché una di trazione si ottiene il grafico simmetrico rispetto all'origine di quello ottenuto per la trazione. I materiali duttili hanno quindi comportamento meccanico simmetrico.
Due casi estremi sono:



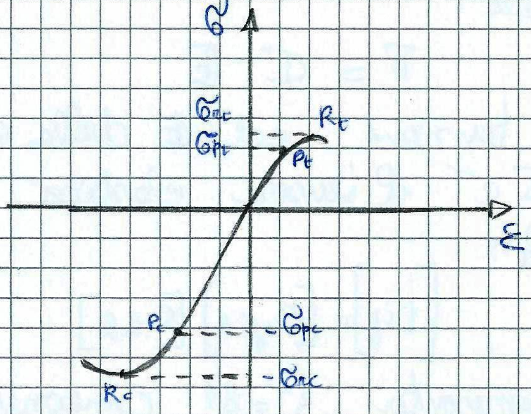


Se si è arrivati al comportamento plastico, si è scaricato il provino per poi caricarlo nuovamente (prima a trazione e poi a compressione), si osserva che la nuova plasticizzazione viene raggiunta a una minore compressione (in modulo). Minore di quella di plasticizzazione del materiale vergine. È l'effetto Bauschinger (permanenza di tensioni residue nel materiale che facilitano la riplasticizzazione):



$|-\sigma_s'| < |-\sigma_s|$

Per i materiali fragili non ci sono invece né simmetrie né plasticità!



La fase elastica è non lineare e porta al raggiungimento della rottura senza fase plastica. La tensione di rottura σ_{rt} è significativamente minore, in modulo, di quella σ_{rc} (rispettivamente di trazione e di compressione). Per questo il comportamento meccanico dei materiali fragili è dissimmetrico.

Teoria assiomatica del legame costitutivo

Il legame costitutivo si basa su tre assiomi:

- determinismo: la tensione dipende solo da storia passata e presente del moto del corpo (sono esclusi gli aspetti probabilistici);
- azione locale: la tensione in un punto definito da $\underline{x}$ dipende solo dal moto dei punti nell'intorno infinitesimo di $\underline{x}$ (non da quello di punti a distanza finita);
- indifferenza materiale: la tensione non dipende dal riferimento spazio-temporale in cui è misurata.

A differenza dei materiali viscosi, la cui risposta dipende dal tempo, per quelli plastici essa è istantanea.
Tratteremo materiali elastici, che sono ancora più particolari: la loro risposta non dipende né dal tempo né dalla storia. Formalmente:

$$\underline{\sigma}(\underline{x},t) = \underline{f}(\underline{\varepsilon}(\underline{x},t), \underline{x}')$$

Se $\underline{x}'=0$ il materiale è omogeneo: $\underline{\sigma}(\underline{x},t)=\underline{f}(\underline{\varepsilon}(\underline{x},t))$

Nello stato naturale $\sigma=0$ e $\varepsilon=0 \Rightarrow \underline{f}(\underline{0},\underline{x})=\underline{0}$

Per un materiale elastico $\underline{\sigma}$ è direttamente proporzionale a $\underline{\varepsilon}$. Nasce il legame costitutivo elastico lineare omogeneo:

$$\underline{\sigma} = \mathbb{C}\,\underline{\varepsilon}$$

In forma matriciale:

$$\mathbb{T} = \mathbb{C} \cdot \mathbb{E}$$

Con $\mathbb{T}$ tensore delle tensioni ed $\mathbb{E}$ della deformazione, entrambi del II ordine. $\mathbb{C}$ è il tensore elastico del IV ordine.
In forma indiciale:

$$[t_{ij}] = [C_{ijhk}] \cdot [\varepsilon_{hk}]$$

In cui C_{ijhk} rappresenta $3^4 = 81$ componenti. Con la forma operatoriale $\underline{\sigma} = \mathbb{C}\,\underline{\varepsilon}$ data l'elasticità del materiale, cioè la simmetria di $\mathbb{T}$ ed $\mathbb{E}$, la matrice $\mathbb{C}$ è una (6×6). Le componenti sono ridotte a 36.
Introducendo l'iperelasticità le componenti si riducono a 21.
Ammettendo l'isotropia ne rimangono solo 2.

Aspetti energetici

Durante la deformazione l'energia meccanica si trasforma in energia termica (accoppiamento debole termomeccanico). Proprio la debolezza di tale accoppiamento consente di trascurare da un punto di vista meccanico gli effetti termici. Tratteremo un materiale ideale, detto iperelastico (e già introdotto quisopra), in grado di immagazzinare tutta l'energia meccanica spesa dall'esterno senza dissipazioni. Ovviamente il processo (tra $t=0$ e $t=t_f$) deve avvenire lentamente, cioè con applicazione quasi statica delle forze:

$$d\underline{u} = \dot{\underline{u}}\,dt \qquad d\underline{\sigma} = \dot{\underline{\sigma}}\,dt \qquad d\underline{\varepsilon} = \dot{\underline{\varepsilon}}\,dt$$

I lavori esterno e interno elementari risultano:

$$dL_e := \left(\int_V \underline{b}^T \dot{\underline{u}}\,dV + \int_{S_f} \underline{f}^T \dot{\underline{u}}\,dS\right)dt \qquad dL_i := \left(\int_V \underline{\sigma}^T \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}\,dV\right)dt$$

Per l'ILV $dL_e = dL_i$. Se vogliamo i lavori totali:

$$L_e = \int_0^{t_f} dL_e \qquad L_i = \int_0^{t_f} dL_i$$

Perciò $L_e = L_i$ per qualsiasi processo di carico e per qualsiasi materiale (anche nel caso di dipendenza dalla storia di carico).

Il lavoro specifico di deformazione

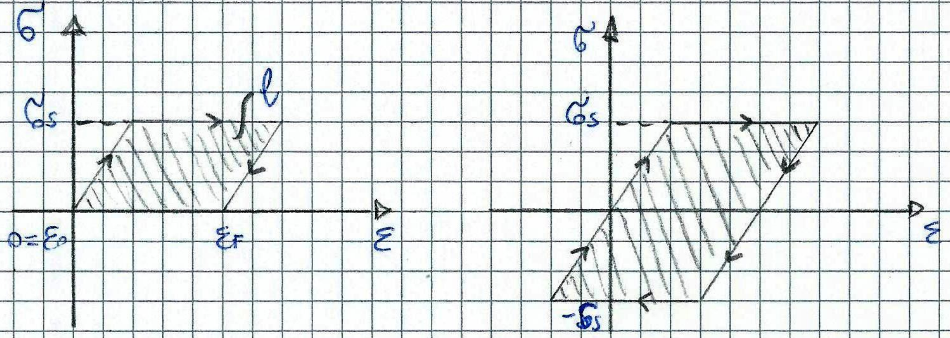
Il lavoro specifico (interno) di deformazione, cioè riferito all'unità di volume, è definito nel modo seguente. Si parte da:

$$dl := \underline{\sigma}^T \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}\, dt$$

Integrando:

$$l := \int_0^{t_f} dl = \int_\Gamma dl = \int_0^{t_f} \underline{\sigma}^T \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}\, dt$$

Il lavoro specifico di deformazione è pertanto l'integrale curvilineo di dl esteso alla curva Γ dello spazio $(\underline{\sigma}, \underline{\varepsilon})$ di equazioni parametriche $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(t)$, $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}(t)$.
Geometricamente equivale all'area sottesa dal grafico della prova monoassiale:



È il lavoro necessario a effettuare la trasformazione, per unità di volume. Notiamo la dipendenza da Γ, del percorso di carico, di $dL_i = \int_V dl\, dV$.

L'energia meccanica dissipata

La dipendenza da Γ scompare se dL_i è un differenziale esatto. In generale lungo una linea chiusa l'integrale non è nullo, ma rappresenta l'energia meccanica dissipata dalla trasformazione.
Se invece dL_i è un differenziale esatto deve essere verificata la condizione necessaria $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\varepsilon})$, cioè l'elasticità del materiale (dipendenza lineare tra $\underline{\sigma}$ ed $\underline{\varepsilon}$). Tale condizione risulta sufficiente (oltre che necessaria) nel caso monoassiale. Nel caso pluriassiale è invece possibile arrivare al medesimo stato finale con infinite combinazioni di $\underline{\sigma}$ ed $\underline{\varepsilon}$. Si aggiunge la condizione:

$$dL_i \text{ diff esatto} \iff dl = \underline{\sigma}^T d\varepsilon$$

Con $d\varepsilon$ densità di energia potenziale elastica specifica.